

文章编号:1000-8055(2013)10-2228-07

样本重复使用失效响应曲线分析结构可靠度方法

冯欢欢, 蒋向华

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

摘 要: 用基于样本重复使用失效响应曲线逼近法, 为充分利用迭代过程中的样本点, 提出了样本重复使用的思想, 并由此发展出一种结构可靠度的计算方法. 利用可靠度指标作为收敛条件, 从迭代收敛后的所有样本点中选取靠近失效界线处的样本点构造失效曲线响应函数, 最后通过蒙特卡洛抽样的方法计算可靠度. 多个算例表明: 该响应函数避免了对传统意义上的功能函数响应面的模拟, 降低了模型维数, 又由于适当地引入了带交叉项、具有曲线旋转功能的响应函数, 因此能够很好地逼近失效曲线, 有效地提高可靠度计算精度.

关 键 词: 结构可靠度; 可靠度指标; 样本重复使用失效响应曲线; 蒙特卡洛抽样法; 响应函数

中图分类号: V215.7

文献标志码: A

Sample points reused failure response curve method for structural reliability analysis

FENG Huan-huan, JIANG Xiang-hua

(School of Energy and Power Engineering,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Based on the failure response curve method, and in order to fully utilize sample points in the iterative process, a sample points reused failure response curve (SPRFRC) method for a sample points reused failure response curve (SPRFRC) method for structural reliability analysis was developed, which regarded structural reliability index as convergence condition, selected sample points near the failure boundary from all sample points after convergence, then constructed failure curve response function and finally calculated the structural reliability by the Monte Carlo sampling method. Some examples show that the response function avoids simulation of performance function response surface, reduces the model dimension; and with introduction of the cross-term response function with rotation functionality, the function enable to approximate the failure curve, and effectively improve the reliability calculation accuracy.

Key words: structural reliability; reliability index;
sample points reused failure response curve (SPRFRC);
Monte Carlo sampling method; response function

在结构设计中, 结构可靠性分析变得越来越重要. 但如果完全依靠试验来进行可靠性分析, 不仅在财力和时间上花费巨大, 而且由于某些条件

的限制而难以达到预期的目的, 因而人们开始利用数值模拟方法开展可靠性分析. 该方法主要是通过有限元计算得出一些数据, 再利用这些数据

收稿日期: 2012-09-24

网络出版地址:

作者简介: 冯欢欢(1987—), 男, 江苏淮安人, 硕士生, 主要从事航空发动机结构强度、可靠性及优化设计.

构造响应面,进而求解可靠度. 响应面法最早是由 Box 和 Wilson 于 1951 年提出来的,利用数值试验的方法得到一个近似函数,用来逼近一个复杂的隐式函数. Wong 于 1985 年首先将响应面法运用到结构可靠度计算中^[1]. 传统的响应面法计算结构可靠度主要利用响应面来逼近功能函数^[2-4],但由于样本点有限,所以并不能很好地逼近功能函数,只有通过这种方法来寻找设计点,再由设计点求出可靠度指标^[5-7],进而求出可靠度. 然而通过这种方法求解的可靠度精度不高^[8],并且严重浪费计算得到的样本点信息,造成资源的浪费. 本文正是针对上述问题,提出了一种基于样本重复使用构造响应函数的结构可靠度数值计算方法,该方法在不降低计算效率的条件下,可以很好地提高计算精度.

1 优秀样本点的信息浪费及结构可靠度指标 β 的局限性

在求解结构可靠度的过程中,每次迭代都会重新设计样本点,直到收敛,利用可靠度指标求出结构可靠度,这种方法是大家普遍采用的. 实际上这种方法求解结构可靠度时只是利用了最后一次迭代步所设计的样本点,然而之前的迭代步所设计的样本点很有可能比这些样本点更加优秀,即更加靠近失效界线. 因而可以挑选所有样本点中比较靠近失效界线的样本点,以此来构造响应面. 同时在利用有限元软件求解样本点响应时,随着分析模型的复杂,所耗费的时间是越来越大的,因此应该充分利用所获得的有效资源,以此来得到更加精确的结果.

结构可靠度指标 β ^[9]是指在标准正态空间中,失效面到坐标原点的最短距离. 采用结构可靠度指标求解可靠度,在线性结构功能函数下求解的结构可靠度的准确性是被大家所接受的,但在非线性结构功能函数下求解的误差是随着功能函数的非线性增加而增加^[10]. 为提高对非线性结构功能函数的模拟能力,本文提出了筛选靠近失效界线样本点来构造响应曲线方程的计算策略,这样求解的可靠度的准确性往往会比直接利用可靠度指标来求解的准确性更高.

2 基于样本重复使用的失效响应曲线法

传统响应面法的过程中,强调对历史样本的摒弃,样本重复使用的失效响应法曲线通过样本

重复使用,避免了求解可靠度时一些优秀样本点信息的浪费. 该方法的主要思想如图 1 所示,关键点就是对迭代过程中产生的所有历史样本,不考虑样本存在于哪次迭代过程中,只依照样本本身的重要性,筛选靠近失效界线处的优秀样本点,然后利用这些样本点构造失效响应曲线函数,最后采用蒙特卡洛抽样^[11]的方法直接求解结构可靠度.

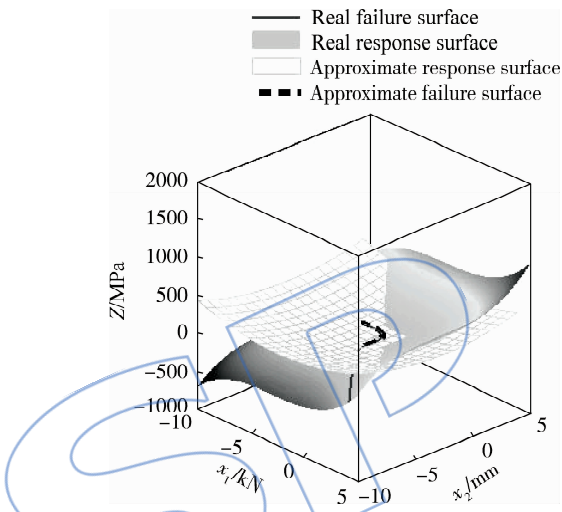


图 1 非线性结构功能函数面逼近与失效界线逼近对比
Fig. 1 Comparison between nonlinear structural performance function surface approximation and failure boundary approximation

2.1 响应面表达式的选择

响应面法就是通过一系列确定性的“试验”拟合一个响应面来模拟真实的曲面,响应值 Z 与变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 之间的关系表达式需要大量的试验进行模拟,将回归拟合得到的一个关系 $\bar{Z} = \bar{g}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 来代替真实的曲面. 在可靠性分析中,传统方法选择的响应面表达式为不含交叉项的二次多项式,利用拟合得到的响应面,使用一次 2 阶矩法或改进的一次 2 阶矩法^[12]求出设计点和可靠度指标. 这种方法虽然有多种改进方法可以提高其计算效率,但由于采用的是求解可靠度指标来得出可靠度,因此对于非线性情况,其计算结果总会有误差,对于非线性程度较大的情况,误差会很大. 本文结合这种方法,在求解设计点和可靠度指标时,响应面采用不含交叉项的二次多项式,而在最后求解可靠度时采用含有交叉项的二次多项式. 这是因为最终要利用一些优秀的样本点来逼近失效曲线,而不是功能函数,这里的交叉项具有旋转功能,这样会更好逼近失效

曲线. 这种方法不仅计算效率不会降低, 而且计算精度也得到了提高. 对于 n 个随机变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 情况, 含不交叉项与含有交叉项的二次多项式分别如下:

$$\bar{Z} = \bar{g}(X) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n a_{n+i} x_i^2 \quad (1)$$

式(1)有 $2n+1$ 个待定系数需要确定.

$$\begin{aligned} \bar{Z} = \bar{g}(X) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \\ \sum_{i=1}^{n/2} b_i x_i \sum_{j=i+1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^n a_{n+\frac{n(n-1)}{2}+i} x_i^2 \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)中 $b_i, c_j = a_k, k = n+1, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$, 所以二次多项式有 $2n + \frac{n(n-1)}{2} + 1$ 个待定系数需要确定.

2.2 响应面待定系数的计算

确定响应面函数的系数, 一般采用最小二乘法. 对于含有 n 个待定系数, 首先通过中心复合设计得到 $m(m \geq n)$ 个试验点 $x_j (j = 1, \dots, m)$, 然后得到 m 个响应值 $\mathbf{g}$, 列向量 $\mathbf{g} = [g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_m)]$, 则响应面的待定系数向量由式(3)可以求得.

$$\mathbf{a} = (\mathbf{M}_X^T \mathbf{M}_X)^T \mathbf{M}_X^T \mathbf{g} \quad (3)$$

其中 $\mathbf{M}_X$ 是由 m 个试验点构成, x_j 为第 i 个试验点的第 j 个分量. $\mathbf{M}_X$ 不含交叉项如式(4), 含有交叉项的如式(5).

$$\mathbf{M}_X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{11}^2 & \cdots & x_{1n}^2 \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2n} & x_{21}^2 & \cdots & x_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & \cdots & x_{mn} & x_{m1}^2 & \cdots & x_{mn}^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{M}_X =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{11} \cdots x_{1n} & x_{11} x_{12} \cdots x_{1,n-1} x_{1n} & x_{11}^2 \cdots x_{1n}^2 \\ 1 & x_{21} \cdots x_{2n} & x_{21} x_{22} \cdots x_{2,n-1} x_{2n} & x_{21}^2 \cdots x_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{m1} \cdots x_{mn} & x_{m1} x_{m2} \cdots x_{m,n-1} x_{mn} & x_{m1}^2 \cdots x_{mn}^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

2.3 基于样本重复使用的失效响应曲线法计算结构可靠度的基本步骤

样本重复使用失效响应曲线法的主要计算过程如图 2 所示.

基于样本重复使用失效响应曲线法计算步骤如下:

1) 将变量的分布形式转化为标准正态分布,

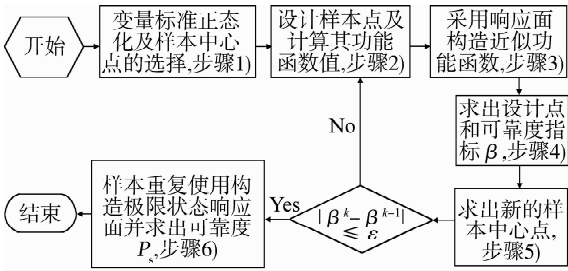


图 2 基于样本重复使用失效响应曲线法
计算流程

Fig. 2 Flow chart of SPRFC

假定样本中心点为 $X_1^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$, 第 1 次迭代一般取均值点, 这里的 n 为随机变量的个数. 第 1 次迭代选取的区间半径为 3σ , 以后每次迭代选取的区间半径为 $f\sigma$, 其中 f 取 0.5;

2) 用中心复合设计方法^[13]选取 m 个试验点, 通过有限元数值方法计算功能函数在每个样本中心点的值 $g(X_i^k), i = 1, \dots, m$;

3) 由式(3)拟合该迭代步的响应面的近似功能函数, 此时选用的是不含交叉项的 2 次多项式;

4) 根据响应面函数运用一次 2 阶矩法求解设计点 $x_d^k = (x_{d1}^k, x_{d2}^k, \dots, x_{dn}^k)$ 和可靠度指标 β^k .

5) 由第 k 步样本中心点和得到的设计点利用式(6)进行线性插值, 得到新的样本中心点;

$$X_1^{k+1} = X_1^k + (x_d^k - X_1^k) \frac{g(X_1^k)}{g(X_1^k) - g(x_d^k)} \quad (6)$$

6) 在所有的样本点中寻找出 $|g(x)|$ 的最小的 $2n + \frac{n(n-1)}{2} + 2$ 个样本点, 并将对应的试验点及功能函数值放在 x 和 f 两个数组中. 利用数组 x 和 f 重新构造响应函数, 此时选用含有交叉项的二次多项式, 则 $\bar{g}(X) = 0$ 能够很好地逼近失效曲线. 从而直接利用蒙特卡洛抽样的方法求解结构可靠度 P_s , 假设抽样次数为 10^6 .

3 算 例

为了验证基于样本重复使用的失效响应曲线法的适用性和有效性, 下面选用几种不同的例子进行数值计算. 特别说明, 相对精确解为运用已知的结构功能函数采用蒙特卡洛抽样的方法所得到的结果, 抽样次数为 10^7 ; 一般方法为不使用样本重复使用而直接利用可靠度指标 β 求出可靠度方法.

例 1 结构功能函数

$$Z = g(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 4.0$$

式中随机变量 $x_1 \sim N(3.0, 1.0)$; $x_2 \sim N(2.9, 1.0)$. 计算结果如表 1, 迭代过程如图 3~图 6, 最终择优构造的响应曲线如图 7.

表 1 例 1 结构可靠度计算结果
Table 1 Reliability evaluation results of example 1

	SPRFRC	一般方法	相对精确解
可靠度	0.99576	0.9916	0.9958
误差/%	0.005	0.422	0
$g(x)$ 求解次数	40	40	

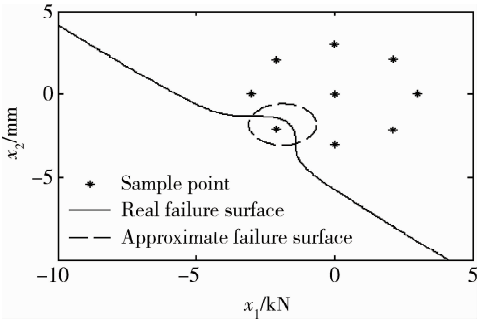


图 3 例 1 第 1 次迭代
Fig. 3 First iterative step of example 1

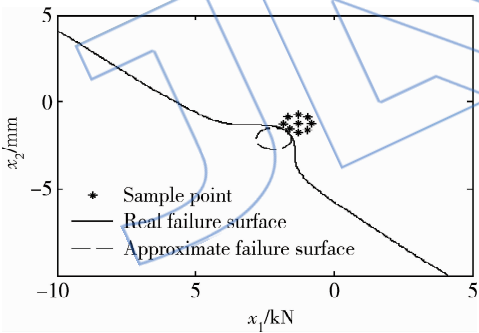


图 4 例 1 第 2 次迭代
Fig. 4 Second iterative step of example 1

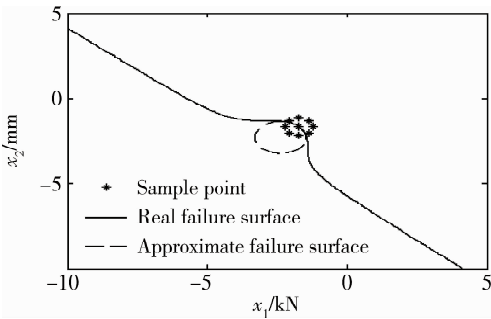


图 5 例 1 第 3 次迭代
Fig. 5 Third iterative step of example 1

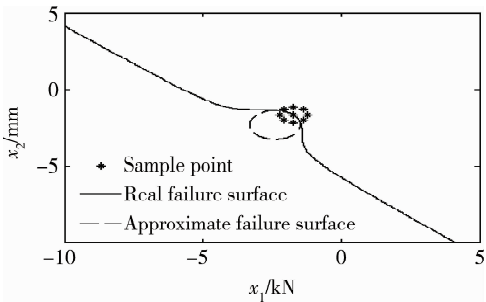


图 6 例 1 第 4 次迭代
Fig. 6 Fourth iterative step of example 1

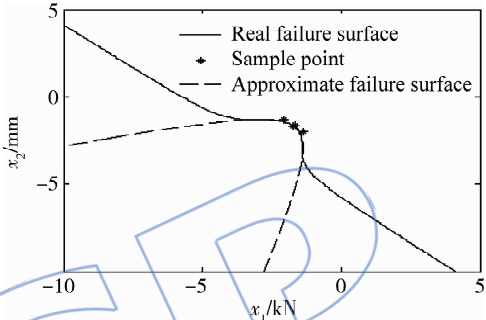


图 7 例 1 择优后结果
Fig. 7 Choosing result of example 1

例 2 结构功能函数

$$Z = g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 20x_1 + 10x_2 + 18$$
式中 x_1, x_2 为标准正态分布, 计算结果如表 2, 择优后构造的响应曲线如图 8.

表 2 例 2 结构可靠度计算结果
Table 2 Reliability evaluation results of example 2

	SPRFRC	一般方法	相对精确解
可靠度	0.784	0.798	0.784
误差/%	<0.005	1.79	0
$g(x)$ 求解次数	30	30	

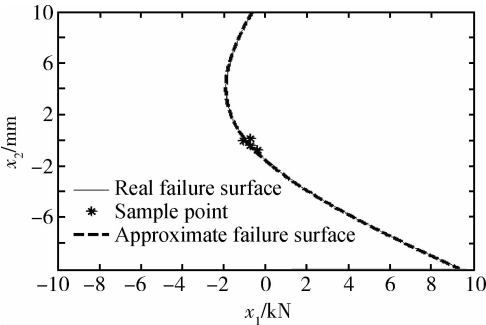


图 8 例 2 择优后结果
Fig. 8 Choosing result of example 2

例 3 结构功能函数

$$Z = g(x_1, x_2) = e^{[0.4(x_1+2)+6.4]} - e^{(0.3x_2+5)} - 900$$

式中 x_1, x_2 为标准正态分布, 计算结果如表 3, 择优后构造的响应曲线如图 9.

表 3 例 3 结构可靠性计算结果

Table 3 Reliability evaluation results of example 3

	SPRFRC	一般方法	相对精确解
可靠度	0.724	0.729	0.724
误差/%	<0.005	0.7	0
$g(x)$ 求解次数	30	30	

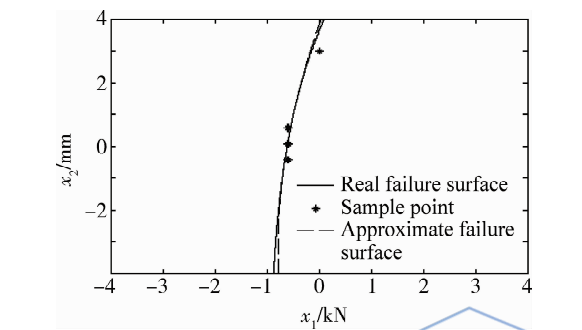


图 9 例 3 择优后结果
Fig. 9 Choosing result of example 3

例 4 结构功能函数

$$Z = g(x_1, x_2) = e^{(0.2x_1+1.4)} - 2x_2 - 2$$

式中 x_1, x_2 为标准正态分布, 计算结果如表 4, 择优后构造的响应曲线如图 10.

表 4 例 4 结构可靠性计算结果

Table 4 Reliability evaluation results of example 4

	SPRFRC	一般方法	相对精确解
可靠度	0.838	0.8307	0.838
误差/%	<0.005	0.87	0
$g(x)$ 求解次数	30	30	

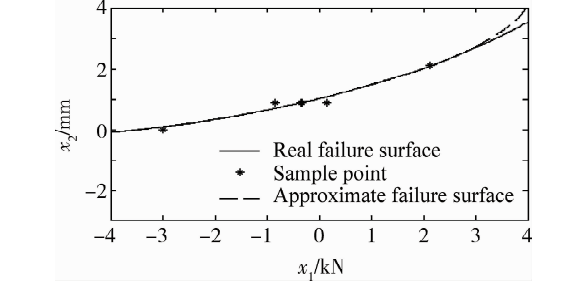


图 10 例 4 择优后结果
Fig. 10 Choosing result of example 4

例 5 在工程结构可靠性分析中的应用

某型发动机涡轮盘, 有限元模型采用轴对称单元, 材料为 GH4169^[14]. 涡轮盘受本身的离心力、叶片离心力以及稳态温度场作用, 忽略气动载荷. 假设其旋转角速度 ω 服从 $N(1\,140, 28)$, 单位为 rad/s , 轮缘外载 $\sigma_{\text{rq}} = K\omega^2$, $K = 1.0619 \times 10^{-4} \text{ MPa} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{rad}^{-2}$. 有限元网格和温度场如图 11. 利用 ANSYS 软件求出最大等效应力及对应的节点, 得知该节点处的温度值在 $200\text{ }^\circ\text{C}$ 左右. 根据应力水平采用 $S-N$ 曲线进行疲劳寿命分析^[15], 标准工作循环 $N^* = 10^5$, 寿命样本的累积概率 P 服从 $[0, 1]$ 区间的均匀分布. 在 $200\text{ }^\circ\text{C}$ 下材料寿命均值及标准差与应力的关系如式 (7) 和式 (8). 图 12 显示了 $200\text{ }^\circ\text{C}$ 时寿命分布情况.

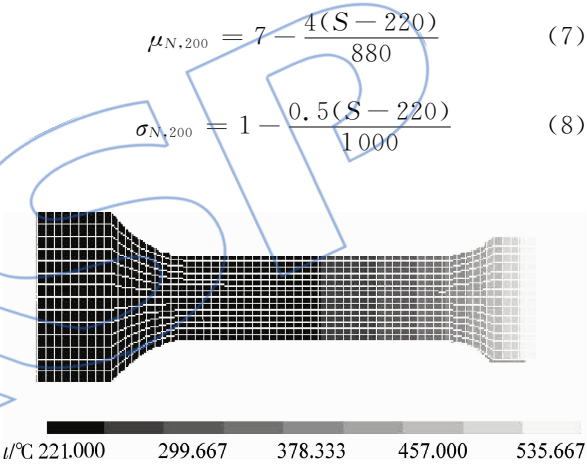


图 11 涡轮盘有限元网格和温度场
Fig. 11 Finite element mesh and temperature field of the turbine disk

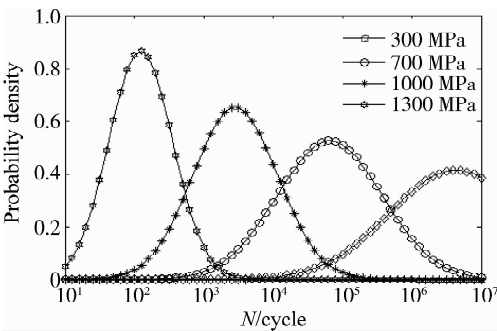


图 12 $200\text{ }^\circ\text{C}$ 时不同应力下的寿命分布
Fig. 12 Life distribution with different stress at $200\text{ }^\circ\text{C}$

该涡轮盘的结构功能函数可表示为

$$Z = g(x_1, x_2) - N^*$$

式中 x_1, x_2 依次代表角速度 ω 和累积概率 P , 该

函数为隐式,计算结果如表 5,择优后构造的响应面如图 13. 此时的相对精确解为蒙特卡洛抽样 10^5 次用 ANSYS 模拟计算的结果.

表 5 例 5 结构可靠度计算结果
Table 5 Structural reliability evaluation results of example 5

	SPRFRC	一般方法	相对精确解
可靠度	0.4270	0.7146	0.4305
误差/%	0.81	65.99	0
$g(x)$ 求解次数	30	30	

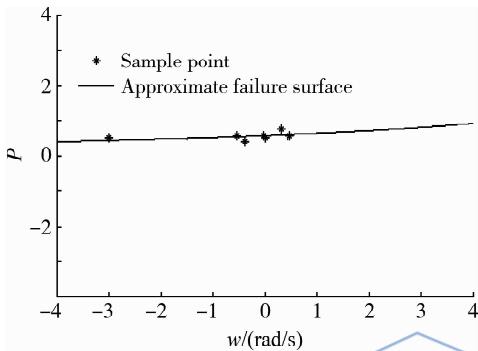


图 13 例 5 择优后结果

Fig. 13 Choosing result of example 5

4 结 论

本文针对样本点信息资源的浪费以及结构可靠度指标的局限性,提出了基于样本重复使用的失效响应曲线法的结构可靠性分析方法,给出了这种方法在几个不同的实例中的应用. 计算结果表明:

- 1) 传统响应面法摒弃了历史样本,在非线性结构功能函数下求解的误差是随着功能函数的非线性增加而增加的.
- 2) 本文提出了对迭代过程中产生的所有历史样本,忽略样本迭代代次的差异,只依照样本本身的重要性,筛选靠近失效界线处的优秀样本点来构造响应曲线方程的计算策略.
- 3) 本文方法不仅降低了模型的维数,而且引入了带交叉项、具有曲线旋转功能的响应函数,能够很好地逼近失效曲线,有效地提高可靠度计算精度,因此该方法在复杂的结构可靠性分析中,具有很好的实际应用价值.

参考文献:

[1] Wong F S. Slope reliability and response surface method

[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1985, 111(1): 32-53.

[2] LIU Ji, LI Yun. An improved adaptive response surface method for structural reliability analysis[J]. Journal of Central South University, 2012, 19(4): 1148-1154.

[3] 赵洁, 吕震宙. 隐式极限状态方程可靠性分析的加权响应面法[J]. 机械强度, 2006, 28(4): 512-516.

ZHAO Jie, LÜ Zhenzhou. Response surface method for reliability analysis of implicit limit state equation based on weighted regression[J]. Journal of Mechanical Strength, 2006, 28(4): 512-516. (in Chinese)

[4] 丁幼亮, 李爱群, 邓扬, 等. 响应面法在结构可靠度分析中的应用研究[J]. 特种结构, 2011, 28(2): 12-16.

[5] 李生勇, 张哲, 石磊, 等. 一种在响应面法中选取样本点的新方法[J]. 计算力学学报, 2007, 24(6): 899-904.

LI Shengyong, ZHANG Zhe, SHI Lei, et al. An new method for selecting sampling points in response surface method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2007, 24(6): 899-904. (in Chinese)

[6] 张哲, 李生勇, 滕启杰. 一种改进的结构可靠度分析中的响应面法[J]. 大连理工大学学报, 2007, 47(1): 57-61.

ZHANG Zhe, LI Shengyong, TENG Qijie. An improved response surface method for structural reliability analysis[J]. Journal of Dalian University of Technology, 2007, 47(1): 57-61. (in Chinese)

[7] 钟宏林, 吴剑国, 王恒军. 可靠性分析的双加权响应面法[J]. 浙江工业大学学报, 2010, 38(2): 218-222.

ZHONG Honglin, WU Jianguo, WANG Hengjun. Reliability analysis of response surface method based on a double weighted regression technique[J]. Journal of Zhejiang University of Technology, 2010, 38(2): 218-222. (in Chinese)

[8] 蒋友宝, 冯健, 孟少平. 极限状态响应面法分析结构可靠度的研究[J]. 公路交通科技, 2006, 23(11): 52-56.

JIANG Youbao, FENG Jian, MENG Shaoping. Research on analysis of structural reliability based on limit state response surface method[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2006, 23(11): 52-56. (in Chinese)

[9] 崔海涛, 彭兆行. 基于几何法的结构可靠度计算[J]. 机械设计与制造, 1997(1): 9-11.

[10] 蒋向华, 杨晓光, 王延荣. 结构可靠度逐步逼近径向基神经网络响应面法[J]. 航空动力学报, 2008, 23(1): 26-31.

JIANG Xianghua, YANG Xiaoguang, WANG Yanrong. An iterative RBFANN response surface method for structural reliability analysis[J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(1): 26-31. (in Chinese)

[11] 郝静如, 米洁. 用蒙特卡洛法计算可靠度的程序优化[J]. 机械设计与制造, 1998(1): 6-8.

[12] 董聪. 现代结构系统可靠性理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,2001:62-72.

[13] 赵选民. 试验设计方法[M]. 北京:科学出版社,2006:191-228.

[14] 北京航空材料研究所. 航空发动机设计用材料数据手册:第 2 册[M]. 北京:国防工业出版社,1993:94-170.

[15] 蒋向华,杨晓光,王延荣. 一种结构可靠性的数值计算方法[J]. 航空动力学报,2005,20(5):778-782.

JIANG Xianghua, YANG Xiaoguang, WANG Yanrong. Numerical approach for structure reliability evaluation[J]. Journal of Aerospace Power, 2005, 20 (5): 778-782. (in Chinese)

